Matemaattinen todistaminen ja abstrahointi lukion matematiikan opetuksessa -opetuskokeilu rakenteisten johtojen avulla

**Ralph-Johan Back, Tanja Kavander, Martin Nylund,
Mia Peltomäki, Tapio Salakoski, Joakim von Wright
Åbo Akademi, Matematisk-naturvetenskapliga fakultetet
miapelto@tkukoulu.fi**

Lukion pitkän matematiikan opetuksessa on vähennetty matemaattisten lauseiden todistamista viimeisten vuosikymmenien aikana. Tässä tarkastelemme kuinka todistamista voitaisiin tuoda takaisin lukio-matematiikkaan strukturoitua esitystapaa käyttämällä.

Avainsanat: lukio, matematiikka, todistaminen

1 Johdanto

Lukion matematiikan opetuksessa on todistusten käyttö ja merkitys pienentynyt viime vuosikymmenien aikana. Vaatimukset matematiikan opetuksen ja opeteltavien taitojen osalta eivät ole ainakaan vähentyneet. Esimerkiksi tietojenkäsittelytieteiden kannalta huomiota olisi kiinnitettävä diskreetin matematiikan ja konstruktiivisen todistamisen taitojen tutuksi tulemiseen jo lukioaikana. Tehtäessä todistuksia asioiden esittämistä tarkasti ja formaalisesti voidaan harjoitella esimerkiksi ohjelmointi- ja abstrahointitaitoja varten. Asioiden kokoaminen pienemmistä osatekijöistä hallitulla tavalla on tärkeää ja tätä voidaan mm. harjoitella matematiikan tunneilla. Tarkastelemme tässä artikkelissa tapaa ratkaista ongelmia rakenteisten johtojen avulla lukion pitkän matematiikan geometrian opetuksessa. Rakenteisten johtojen käytöllä matemaattinen ongelma ratkaistaan muuntamalla ongelma perusteltujen ratkaisuaskeleiden avulla tulokseksi. Tarkastelussa kartoitetaan menetelmän käytön soveltuvuutta geometrian ongelmiin ja osoitustehtävien ratkaisemiseen. Tutkimusaineistona on käytetty oppilaiden tuottamia koevastauksia.

2 Tutkimuksen taustaa

Lukion pitkässä matematiikassa on todistuksien määrä vaihdellut runsaasti viime vuosikymmenien aikana. 70-luvulla matematiikan kirjoissa lähes kaikki lauseet todistettiin. Laajassa matematiikassa todistettujen lauseiden osuus oli vielä 70-luvulla noin 90%, mutta vuoden 1985 opetussuunnitelmaa noudatettaessa se oli enää noin 30%. Nykyisin voimassa olevan vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman mukaan pitkän matematiikan opetuksessa painotetaan mm. monipuolisen laskutaidon rinnalla päättelyä ja todistamista. Ylioppilaskirjoituksissa on kuitenkin 1990-luvulla ollut vähän todistustehtäviä ja niissäkin päättely on tapahtunut yleensä laskemalla. Todistamisajattelun puuttuminen on ollut nähtävissä mm. yliopistoissa matematiikan opintoja aloittavien keskuudessa (Malinen, 1996). Nykyisin todistuksia käsitellään ensimmäisen kerran geometrian kursseilla: Geometria sekä Trigonometria ja vektorit.

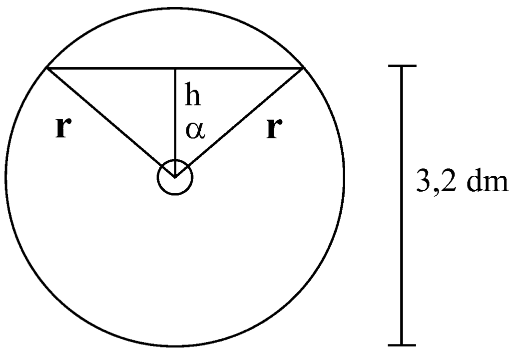
Rakenteiset johdot on suunniteltu alunperin tietojenkäsittelytieteen tarpeisiin erityisesti tietokoneohjelmien oikeaksi todistamiseen ja ohjelmien formaaliseen muodostamiseen annettujen alkuehtojen mukaisesti. Rakenteisten johtojen perusta on laskennallisessa todistustekniikassa (calculational proof paradigm), jossa matemaattisia kuvauksia muutetaan askeleittain ongelman asettelusta vastaukseksi (van Gasteren, 1990). Tähän menetelmään perustuen Back ja von Wright kehittivät menetelmää edelleen ohjelmien oikeellisuuden ja rakenteisen kehittämisen tueksi. He lisäsivät menetelmään mahdollisuuden liittää laajoihin ratkaisuihin askeleille alisteisia johtoja eli alijohtoja (Back ym. 1996; Back & von Wright 1999).

Käytettäessä rakenteisia johtoja matematiikan tehtävien ratkaisussa jokainen ratkaisun askeleen peruste merkitään eksplisiittisesti näkyviin. Näin ratkaisuista muodostuu looginen kokonaisuus, jossa jokainen ratkaisun askel voidaan osoittaa perustelluksi. Alijohdot sisältävät yksityiskohtaisemman ratkaisun tehtävän osasta ja ne voidaan haluttaessa piilottaa hypertekstilinkin avulla. Käytetyllä menetelmällä on luonnollinen yhteys todistamiseen ja asioiden abstrahointiin matematiikassa. Tätä menetelmää käyttäen tehtävien ratkaiseminen vastaa itse asiassa todistuksen tekoa.

Tarkoituksena on kehittää opiskelijoiden matemaattista ajattelua tutustuttamalla heidät epämuodollisesti matemaattisen todistuksen (johdon) käsitteeseen jo lukion ensimmäisistä kursseista alkaen ja näin antaa heille paremmat valmiudet erityisesti matemaattisten alojen yliopisto-opintoihin.

Esimerkkinä menetelmän sovelluksesta lukiomatematiikkaan esitellään Geometrian kurssiin pohjautuva syksyn 1995 ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan kuudes tehtävä.

Suoran ympyrälieriön muotoisen tynnyrin vetoisuus on 200 l ja sen sivun pituus on 1,12 m. Kyljellään makaavassa tynnyrissä on polttoainetta 32 cm. Ostaja maksoi tynnyristä polttoaineineen 600 mk. Tekikö ostaja hyvän kaupan, kun polttoaine maksaa 4,67 mk/l ja tynnyri on arvoltaan 100 mk? (pitkä matematiikka syksy 1995 tehtävä 6)



Kuva 1 Tehtävän ratkaisu muodossa, jossa kaikki alijohdot on piilotettu.

Ostaja tekee hyvät kaupat

≡ { käsittelyehdot }

”polttoaineen ja tynnyrin yhteishinta erikseen myytyinä” > 600 mk
≡ { tynnyrin hinta on 100 mk ja yksi litra polttoainetta maksaa 4,67 mk }
4,67 mk/dm³ × ”polttoaineen määrä” + 100 mk > 600 mk

≡ {polttoainemäärän määritys }

4,67 mk/ dm³ × 142,7 dm³+ 100 mk > 600 mk
≡ {lasketaan }
766,43 mk > 600 mk
≡ {sievennys }
T

Tehtävän ratkaisu muodossa, jossa kaikki yksityiskohdat ovat näkyvissä.

Ostaja tekee hyvät kaupat
≡ { käsittelyehdot }
”polttoaineen ja tynnyrin yhteishinta erikseen myytyinä” > 600 mk
≡ { tynnyrin hinta on 100 mk ja yksi litra polttoainetta maksaa 4,67 mk }
4,67 mk/dm³ × ”polttoaineen määrä” + 100 mk > 600 mk
≡ {polttoainemäärän määritys }

- ”polttoaineen määrä”

= { lieriön tilavuuden kaava }
” suuremman segmentin ala” × 11,2 dm
= {suuremman segmentin määrittäminen}

- ”suurempi segmentti”

= { segmentin alan kaava }
$(360° - 2\alpha) / 360° \times \pi r^2$ + ”keskuskolmio”
= {määritetään r, $\underline{\alpha}$ ja keskuskolmio }

- r

= { $V = \pi r^2 \times h$, ratkaistaan r }
$\sqrt{V/(\pi \cdot h)}$
= { V = 200 dm³, h=11,2 dm }

$\sqrt{200dm^3/(\pi \cdot 11{,}2dm)}$

= { lasketaan }

2,3841 dm

- α

= { Kuva 1 }

arccos ((3,2 dm – r) / r)

= { r = 2,3841 dm }

69,987°

- ”keskuskolmio”

= { $A = ½(r^2\sin(2\alpha))$ }

$½ \times (2{,}3841^2\ dm^2 \times \sin(2 \times 69{,}987°))$

= {lasketaan}

$1{,}828\ dm^2$

$(360° - 2 \times 69{,}987°) / 360° \times p \times 2{,}3841^2\ dm^2 + 1{,}828\ dm^2$

= {lasketaan}

$12{,}742\ dm^2$

$12{,}742\ dm^2 \times 11{,}2\ dm$

= { lasketaan }

$142{,}7\ dm^3$

$4{,}67\ mk/ dm^3 \times 142{,}7\ dm^3 + 100\ mk > 600\ mk$

≡ {lasketaan }

766,43 mk > 600 mk

≡ {sievennys }

T

3 Opetuskokeilu

Menetelmän käyttöä on kokeiltu Kupittaan lukiossa Turussa syksystä 2001 alkaen ja kokeilu jatkuu 3-4 vuotta. Testiryhmään valittiin 25 ja vertailuryhmään 28 ensimmäisen vuoden opiskelijaa. Opiskelijat valittiin ryhmiin lukion informaatioteknologiapainotteiseen opetukseen osallistuvien ryhmästä. Toinen valintaperuste oli ennen lukion alkua pidetty lähtötasokoe. Peruskoulun päättötodistuksen matematiikan keskiarvo oli testiryhmällä 9,7 ja kontrolliryhmällä 8,9. Oppilaat tulivat useista eri kouluista, joten arvosanat eivät ole täysin vertailukelpoisia. Myös opiskelijoiden asenteita matematiikkaa kohtaan tutkittiin. Ryhmien välillä löytyi eroja, kun kysyttiin miksi valitsit pitkän matematiikan. Testiryhmän mielipiteissä painottuivat matematiikan mielenkiintoisuus ja haastavuus, kun taas kontrolliryhmä piti tärkeimpänä valintaperusteenaan jatko-opintomahdollisuuksia. Toinen selkeä ero tuli vastauksissa kysymykseen mihin odotat voivasi soveltaa matematiikkaa. Yli puolessa testiryhmän vastauksista mainittiin ohjelmointi, sen sijaan kontrolliryhmän vastauksissa ei ollut yhtenäistä linjaa ja vain kolme mainitsi ohjelmoinnin.

Menetelmän käyttöä varten testiryhmän opiskelijoille opetettiin ensimmäisen kurssin alussa logiikan peruskäsitteitä muutaman oppitunnin ajan. Tämän jälkeen opetuksessa edettiin rakenteisia johtoja käyttäen. Testiryhmä ei käyttänyt oppikirjaa näillä kahdella ensimmäisellä kursseilla, vaan opettaja teki itse käytettävän materiaalin. Kontrolliryhmänopetus eteni perinteisesti. Oppikirjana käytettiin Pyramidi-sarjan tietokirjaa 1 (Kontkanen ym. 2001).

Rakenteisten johtojen menetelmän soveltamista geometrian kursseilla pidettiin mielenkiintoisena kokeiluna nimenomaan todistus- ja osoitustehtävissä, sillä opiskelijoilla on usein ennakkoasenteita todistamista kohtaan. Samoin todistusten tuottamista pidetään opettajille usein haasteena (Hanna 1996). Testiryhmälle ei ole opetettu mitään erityistä tekniikkaa todistus- ja osoitustehtävien ratkaisemiseen tavallista kurssia enempää. Ainoana erona on ollut ainoastaan se, että todistuksia tavalla tai toisella käsitelleet tehtävät on ainoastaan ratkaistu rakenteisten johtojen menetelmän avulla. Geometrian kurssien opetuksessa on käytetty normaaliin tapaan oppikirjaa Pyramidi tieto- ja harjoituskirja 2 (Kontkanen ym. 2001). Opetuksessa käytetyt esimerkit ja kotitehtävien ratkaisut on kuitenkin esitetty oppikirjasta poiketen rakenteisten johtojen avulla.

Tähän mennessä saatujen tietojen perusteella kahden ensimmäisen pitkän matematiikan kurssin Funktiot ja yhtälöt I ja II oppimistulokset testiryhmässä olivat vertailuryhmää paremmat (Kavander ym., 2001). Testi ja kontrolliryhmien peruskoulun päättötodistusten keskiarvojen ero oli 0,8 numeroa. Ensimmäisen kurssin arvosanojen keskiarvojen erotus oli 1,7 , toisen kurssin 2,0 ja kolmannen kurssin 2,1 numeroa. Trigonometria ja vektorit –kurssissa tutkimme menetelmän käyttöä testiryhmän sisällä.

Kurssin jälkeen pidettiin kokeet, joissa oli kymmenen koetehtävää. Näistä kahdeksaan tehtävään piti vastata. Miten oppilaat sitten vastasivat? Tarkastellaan tarkemmin Trigonometria ja vektorit - kurssin kahta erityisesti osoittamiseen liittyvää tehtävää. Ensimmäinen tehtävä (Kontkanen ym. 2002, 49):

Osoita, että lausekkeen $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$ arvo ei riipu kulmasta α.

Tehtävään vastattiin erittäin hyvin. Rakenteisten johtojen käyttö oli vapaaehtoista, mutta kahdestakymmenestä tehtävään vastanneesta opiskelijasta ainoastaan kolme ei käyttänyt menetelmää. Siitä, auttoiko menetelmän käyttö kyseisen tehtävän ratkaisussa, ei voida vielä vetää johtopäätöksiä. Kolme opiskelijoista, jotka valitsivat tehtävän, ei osannut tehdä sitä – heistä kaksi ei käyttänyt rakenteisten johtojen menetelmää. Opiskelija, joka menetelmää käytti, oli erehtynyt vastauksessaan muistikaavan soveltamisessa. Kyseisessä tehtävässä menetelmän hyödyntäminen onnistui opiskelijoilta erittäin hyvin.

Toinen tehtävä oli myös tyypillinen osoitustehtävä. Siinä piti osoittaa, että pisteet (0,0,0), (3,0,-2), (-1,2,6) ja (5,-1,-6) ovat samassa tasossa. (Pippola, 1995)24 opiskelijan ryhmästä kymmenen oli valinnut kyseisen tehtävän ratkaistavakseen. Heistä kuusi oli käyttänyt vastauksessaan ainakin osittain rakenteisten johtojen menetelmää ja ratkaissut tehtävän oikein. Vain yksi tehtävän oikein ratkaisseista ei käyttänyt ollenkaan rakenteisia johtoja. Sama opiskelija, ainoana ryhmästä, on vastustanut menetelmää alusta alkaen. Väärän tai puutteellisen ratkaisun tehtävästä antaneet opiskelijat eivät käyttäneet rakenteisia johtoja. Menetelmän käyttö rajoittui osalla vastanneista selitysten antamiseen mekaanisissa laskutehtävän osissa. Muutamat opiskelijat kykenivät kuitenkin tukeutumaan menetelmään täydellisesti edellä esitellyn malliratkaisun tavoin. He ratkaisivat tehtävän lähtien väitteestä ja päätyen loogisen totuusarvon antavaan lopputulokseen. Näissä ratkaisuissa näkyi tehtävän kokonaisvaltainen ymmärtäminen.

4 Johtopäätökset ja toimenpide-ehdotukset

Tähän mennessä on voitu todeta tarkastelemalla opiskelijoiden antamia koevastauksia, että rakenteisten johtojen menetelmän avulla opetettaessa voidaan tehtävien ratkaisujen ulkoasua selkeyttää ja jäsentää helposti ja hallitusti. Opettajan on helppo seurata opiskelijoiden ajatusten etenemistä tehtävien ratkaisuissa. Menetelmä pakottaa myös oppilaat miettimään, mitä ratkaisumenetelmiä ja sääntöjä pitää käyttää, koska kaikki pitää kirjoittaa kommentteina näkyviin. Myös omien tehtävien tarkastelu jälkeenpäin helpottuu, kun opiskelija pystyy itse seuraamaan aikaisempaa ajatuskulkuaan ja ratkaisumenetelmiään.

Oppilaat etsivät ja kokeilevat usein oikoteitä ongelmien ratkaisuun ja unohtavat päättelyn perusteiden analysoinnin. Malinen (1996) on todennut, että, että hyvin matematiikkaa oppineet antavat keskimäärin selkeämpiä selityksiä päätelmilleen, mutta kiinnostus päättelyn analysointiin saattaa viritä myös heikosti menestyneillä. Pidämme rakenteisten johtojen menetelmän käyttöä yhtenä mahdollisuutena parantaa heikommin menestyneiden opiskelijoiden kiinnostusta päättelyn analysointiin. Tarkastelussa on tähän mennessä voitu havaita, että yleisesti ottaen hyvin menestyvillä opiskelijoilla ei ole ollut vaikeuksia soveltaa oppimiaan taitoja todistamisesimerkeissä. Menetelmän järjestelmällinen ja tehokas käyttöönotto vaatii kuitenkin pitemmän aikavälin toimenpiteitä. Menetelmän soveltaminen ei ole vaikeuttanut tehtävien tekemistä, mutta osa opiskelijoista ei ole vielä ottanut asiaa omakseen, vaan he pitävät kommenttien kirjoittamista ainakin kotitehtävissä turhana.

Menetelmän käytössä on tullut ilmeiseksi se, että opiskelijoiden matemaattisten taitojen käytön kannalta olisi oleellista logiikkaan liittyvien asioiden laajempi käsittely jo aiemmin opetuksessa, esimerkiksi yläasteella. Päättelyprosessien ja todistamisajattelun kehittäminen pitäisi aloittaa jo varhain. Matemaattinen todistaminen loogisten päättelysääntöjen ja matematiikan tieteellisessä tutkimuksessa hyväksyttyjen metodien mukaisesti vaatii harjoittelua eikä sitä voi tuoda suoraan oppilaiden ajatusmaailmaan. Formaali ajattelu on saanut aikanaan kouluopetuksessa huonon maineen käytännölle vieraana (Malinen, 1996). Koulumatematiikassa esiintyvä todistamisen väheksynnän uskotaan kuitenkin olevan tilapäistä. Kokeilussa käyttämämme menetelmä ei ole käytännölle vieras, vaan vähin lisämerkinnöin voidaan todistaminen tuoda takaisin koulumatematiikkaan.

Opiskelijoiden opintojen tukemiseksi materiaalia on tuotettava tulevaisuudessa erityisesti vaikeampiin tehtäviin, sillä näistä on eniten hyötyä laajojen kokonaisuuksien hahmottamisessa. Opetuskokeilun jatkon kannalta on tärkeä syventää menetelmän käyttöä ratkaisumenetelmiltään monipuolisempien tehtävien suuntaan.

Lähteet

Back, R. J., Grundy, J. & von Wright, J. 1996. Structured Calculational Proof. Tech. Rpt. 65. Turku Centre for Computer Science.

Back, R. & von Wright, J. 1999. Structured Derivations: a Method for Doing High-School Mathematics Carefully. Tech. Rpt. 246. Turku Centre for Computer Science.

van Gasteren, A. J. M. 1990. On the Shape of Mathematical Arguments. Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer-Verlag.

Hanna G. 1996. The Ongoing Value of Proof. Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 1, 21-34.

Kavander, T., Nylund, M., Peltomäki, M., Salakoski, T. & von Wright, J. 2001. Teaching High-School Mathematics with Structured Derivations in Hypertext Format. Teoksessa Kolin kolistelut – Koli Calling: Proceedings of the First Annual Finnish/Baltic Sea Conference on Computer Science Education. University of Joensuu. Department of Computer Science Report series A, 46-52.

Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A. & Savolainen, S. 2001. Pyramidi. Matematiikan tietokirja 1. Hämeenlinna: Tammi.

Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A. & Savolainen, S. 2001. Pyramidi. Matematiikan harjoituskirja 2. Hämeenlinna: Tammi.

Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Nurmi, J., Nurmiainen, R., Ronkainen, A. & Savolainen, S. 2001. Pyramidi. Matematiikan tietokirja 2. Hämeenlinna: Tammi.

Malinen, P. 1992. Looginen ajattelu matematiikan opetuksessa. Tutkimuksia 49. Opettajainkoulutuslaitos. Jyväskylän yliopisto.

Malinen, P. 1996. Selkeyttä todistamiseen koulumatematiikassa. Dimensio, 60 (5), 22-24.

Malinen, P. 1998. Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos.

Opetushallitus. 1994. Lukion opetussuunnitelman perusteet. Helsinki.

Pippola, L. (toim). 1995. Tsemppi, lukiomatematiikan harjoituskirja. Osa 3: laaja oppimäärä. Helsinki: MFKA-kustannus.